DOI https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)-106-127
УДК 37.091.12.011.3-051:514.113:005.963

Кірман Вадим Кімович,
кандидат педагогічних наук,
завідувач кафедри природничо-математичної освіти
КЗВО «Дніпровська академія неперервної освіти»
Дніпропетровської обласної ради».
Дніпро, Україна.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8107-6618
vadym.kirman@gmail.com

Харлаш Людмила Михайлівна,
кандидат філософських наук,
доцент кафедри природничо-математичної освіти
КЗВО «Дніпровська академія неперервної освіти»
Дніпропетровської обласної ради».
Дніпро, Україна.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0797-1873
lharlash@gmail.com

ФОРМУВАННЯ ГОТОВНОСТІ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ НАВЧАТИ ПРОВЕДЕННЯ ОБҐРУНТУВАНЬ У СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Анотація. У статті досліджується готовність учителів математики навчати проводити обґрунтування в стереометричних задачах учнів старшої школи. Показано, що готовність учителя здійснювати відповідну діяльність включає три складові: математичну, організаційно-методичну та ілюстративно-технологічну, що включають в себе уміння самого вчителя розв'язувати задачі на доведення в стереометрії, організовувати роботу учнів на уроці при виконанні задач на обґрунтування в стереометрії, використання цифрових технологій для ілюстрацій у стереометричних задачах відповідно. Проведені вимірювання та спостереження фіксують лише незначний відсоток вчителів, які ідеально можуть розв'язувати задачі на обґрунтування середньої складності, цей відсоток має порядок такий самий, як і в учасників зовнішнього незалежного оцінювання з математики (не перевищує 3%). Виявлено основну групу питань, що є проблемними більш ніж для 50% вчителів, які працюють в старшій школі: задачі на обґрунтування, пов'язані з ознакою мимобіжності прямих, перпендикулярністю площин, кута між площинами, відстанями від точки до прямої, від точки до площини, між мимобіжними прямими, геометричними місцями точок у просторі, перерізами. Показано, що недостатні навички вчителів при розв'язуванні задач на обґрунтування

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

стають причинами неможливості ідентифікації учнівських помилок та недоліків при критеріальному оцінюванні розв'язань геометричних задач з розгорнутою відповіддю. Запропоновано підходи до розвитку готовності вчителів навчати обґрунтування в стереометричних задачах. Вони включають під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів діагностику та самоаналіз вчителями результативності розв'язування задач на доведення, систему лекцій та практичних занять з питань логічної структури курсу геометрії, проведення комбінованих математико-методичних тренінгів, виконання практичних робіт та міні-проектів з використанням сучасних навчальних цифрових технологій, формування індивідуальних планів самоосвіти. Проведено аналіз динаміки успішності виконання вчителями математики завдань на обґрунтування в стереометрії. Показано, що спостерігається тенденція збільшення вчителів математики, які впорались із завданнями на обґрунтування після завершення курсів підвищення кваліфікації по відносно з початком за умов використання запропонованих підходів.

Ключові слова: професійна компетентність вчителя математики; задачі на доведення; обґрунтування в стереометрії; заклади післядипломної освіти; неперервна освіта.

1. ВСТУП / INTRODUCTION

Постановка проблеми. Задачі на доведення мають особливе значення в шкільному курсі математики, серед них найважливішими є задачі на доведення в стереометрії, для розв'язування яких потрібен як строгий логіко-формальний апарат, так і просторові уявлення, інтуїція [3], [7]. Останнє необхідне для висунення правильних гіпотез, що потім строго доводяться. Узагальнювальну інформацію про успішність виконання задач на доведення в стереометрії ми можемо отримати з результатів сертифікаційної роботи з математики зовнішнього незалежного оцінювання в нашій країні. З 2016 року в завданнях відкритої частини з розгорнутою відповіддю пропонується стереометрична задача, одним-двома кроками виконання якої є обґрунтування. За форматом 2016–2019 років сертифікаційна робота зовнішнього незалежного оцінювання з математики містить лише одне завдання, що містить обґрунтування в геометрії, – завдання 32 сертифікаційної роботи. Водночас коефіцієнт кореляції (Rit) для цього завдання достатньо суттєвий – 0,6 [4, с. 220]. Дійсно, логічна культура здобувачів освіти суттєво впливає і на успішність розв'язування обчислювальних задач та задач, які передбачають отримання відповіді завдяки інтуїції. Водночас за результатами перевірки, наприклад, 2019 року відсоток випускників, які успішно впорались з обґрунтуванням в

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

геометричній задачі коливається в діапазоні від 2,4% до 3% [4, с. 220]. У зв'язку з величезною важливістю задач на доведення бажано знати причини таких низьких показників. Однією з них, очевидно, може бути недостатня готовність вчителів навчати проводити обґрунтування в стереометричних задачах та взагалі розв'язувати задачі на доведення. Отже, актуальною є проблема дослідження стану готовності вчителів навчати розв'язувати задачі на доведення в стереометрії та розробка підходів до її підвищення в системі післядипломної педагогічної освіти. Останнє, очевидно, пов'язано з трансформацією змісту навчання в закладах післядипломної педагогічної освіти. При цьому дуже важливо, щоб освітні послуги при підвищенні кваліфікації педагогів носили не формальний характер, а реально впливали на якість освіти в цілому. Отже, формування змісту навчання курсів підвищення кваліфікації вчителів математики не може носити безсистемний характер і підлягає науковому обґрунтуванню.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Післядипломна освіта вчителів математики все більше потрапляє в поле зору дослідників теорії та методики навчання математики. Ретельні дослідження та експерименти проводяться Н. Тарасенковою та представниками її наукової школи [8], [9]. Відповідні дослідження торкаються розвитку методичної компетентності вчителя математики, аналізу навчальних текстів, удосконаленню роботи з цифровими засобами навчання. На розвитку окремих аспектів методичної компетентності концентрує увагу у своїх дослідженнях Л. Голодюк [2], вважаючи їх ядром післядипломної освіти вчителів математики. Водночас у фундаментальних роботах Н. Тарасенкової, І. Акуленко, А. Кузьмінського [1], [6] доводиться, що при підготовці майбутніх вчителів математики методичні курси мають бути максимально «математично насиченими». Такої ж думки дотримується О. Чашечнікова [10], яка висловлює кардинальну ідею об'єднання курсу елементарної математики та методики навчання математики в одну дисципліну в педагогічних вишах. Ідеї синтезу методичної та математичної складової під час проведення курсів підвищення кваліфікації та розвитку математичної складової вчителів математики обговорюються нами в ряді робіт та стисло сформульовано в [5]. Питання стану теоретичної підготовки вчителів для навчання розв'язувати задачі на доведення учнів в сучасних умовах досі ретельно не досліджувалось.

2. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ / AIM AND TASKS

Метою статті є обґрунтування структури готовності навчання розв'язувати задачі на доведення в стереометрії, оцінка стану відповідної готовності, формулювання основних напрямів її підвищення в системі післядипломної педагогічної освіти.

Відповідно до зазначеної мети у статті поставлено такі ***завдання***: проаналізувати діяльність вчителів, що пов'язана з навчанням розв'язувати задачі на доведення; на основі цього аналізу описати структуру готовності до цієї діяльності, виділити в ній головні компоненти; провести вибіркові дослідження математичної складової готовності навчати розв'язувати задачі на доведення в стереометрії; дослідити вплив успішності математичної діяльності вчителя на інші види діяльності в процесі навчання розв'язувати задачі на доведення; виявити ключові проблеми математичної компетентності вчителів у питаннях логічної структури стереометрії; запропонувати трансформації у системі післядипломної перепідготовки вчителів математики, спрямовані на розвиток навичок розв'язувати стереометричні задачі на доведення; експериментально перевірити ефективність запропонованих трансформацій.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ / THE THEORETICAL BACKGROUNDS

У даному дослідженні ми спираємось на основні положення компетентнісного підходу, структуру математичної компетентності. Ми аналізуємо відображення компетенцій для виконання відповідного виду діяльності. Досліджуючи діяльність вчителя математики, нами виокремлено елемент «навчання розв'язувати задачі на доведення в стереометрії», цей елемент діяльності має проектуватись у відповідні складові математичної та методичної компетентності вчителя, що формують його готовність до даного роду діяльності. Ми спираємось на багатокомпонентність (багатовимірність) відповідної готовності, розкладання її на компоненти професійної компетентності вчителя.

4. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ / RESEARCH METHODS

Для вирішення поставленої мети використано теоретичні та емпіричні методи наукового дослідження: структурний аналіз готовності вчителів навчати розв'язувати задачі на доведення в стереометрії, експертне оцінювання факторів результативності навчання, тестування з метою виявлення стану математичної підготовки для розв'язування задач на доведення, первинна обробка статистичних даних, методи непараметричної статистики, аналіз та систематизація спостережень під час інтерактивних занять на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики.

5. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ / RESEARCH RESULTS

Спираючись на загальнодидактичні функції вчителя, можна виділити декілька форм діяльності, пов'язаною з навчанням розв'язувати

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

стереометричні задачі на доведення. По-перше, це математична діяльність: вчитель має при підготовці до уроку розв'язати низку задач або розібрати приклади ключових задач, під час уроку вміти продовжити розв'язання за іншим, непередбаченим сценарієм тощо. По-друге, організаційно-методична діяльність: в складних педагогічних ситуаціях треба правильно обрати методи та форми роботи на уроці, спланувати оптимальне застосування засобів навчання, комплексів наочності, безпосередньо організувати роботу на уроці. Ця діяльність є дуже складною саме при навчанні задач на доведення в стереометрії в силу високого логічного рівня таких задач. Дуже важливим аспектом для вчителя тут є вибір базових мотиваційних факторів. Нарешті, третій тип діяльності пов'язаний з використанням сучасних, зокрема цифрових технологій навчання. Цифрові засоби навчання ми класифікуємо за призначенням: комунікаційним, контролюючо-тренувальним, ілюстративно-наочним та інструментальним. Специфічним для наших питань є два останніх призначення. Інструментальне призначення безпосередньо означає використання цифрових засобів (програмних комплексів, середовищ тощо) для розв'язування задач. Зрозуміло, що це, в основному, обчислювальні задачі. Технологія використання цифрових засобів в задачах на доведення достатньо розроблена [11]. У задачах на обґрунтування засоби інструментального призначення мають важливу допоміжну функцію: організація віртуального математичного експерименту, результатом якого стає формулювання робочої гіпотези, яку вже необхідно доводити формально-логічними методами. На цей час властивості засобів третього та четвертого в нашій класифікації призначення має система динамічної тривимірної геометрії GeoGebra. Очевидно, що сучасний учитель має володіти навичками роботи з цією системою або її аналогами.

Зупинимось більш детально на деяких аспектах організаційно-методичної роботи вчителя при навчанні розв'язувати стереометричні задачі на доведення. Звернемо увагу, що вчитель приймає рішення для певної педагогічної ситуації. Педагогічна ситуація, на нашу думку, характеризується двома головними і одним додатковим фактором. До останнього ми відносимо рівень забезпечення засобами навчання. До головних факторів ми відносимо (для нашої проблематики – задач на доведення в стереометрії) кількість годин, що виділяється в тиждень на вивчення стереометрії (від 1 до 4) та рівневим профілем класу. Рівневий профіль – це розподіл кількості учнів по рівням навчальних досягнень з геометрії. Можна виділити декілька основних типів розподілів такого виду: а) рівномірний; б) переважно правосторонній (домінує кількість учні з високим та середнім рівнями); в) переважно лівосторонній; г) центральний;

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

д) змішаний. Останній, очевидно, можна ще розбити на декілька підтипів. Загалом існує мінімум 20 педагогічних ситуацій і вибір стратегії вчителя в умовах такого майже комбінаторного вибуху є суперскладною задачею. І хоча не існує чіткого алгоритму побудови відповідних стратегій, спілкування фахівців під час методичних тренінгів дозволяє досвідченим вчителям поступово знаходити оптимальні рішення. Очевидно, що описана проблема ще потребує детального дослідження.

Усі види діяльності стають беззмістовними без першої, математичної діяльності. Вона, перш за все, має включати роботу вчителя по розробці логічно досконалих, майже ідеальних розв'язань геометричних задач, що містять доведення. Проілюструємо це на прикладах двох задач сертифікаційних робіт, що пропонувались на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики 2016 та 2018 роках.

Розглянемо задачу, де основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, більша діагональ якого $AC = 30$. Грань SBC є рівнобедреним трикутником з вершиною S і перпендикулярна до площини основи піраміди. Ребро SC нахилено до площини основи піраміди під кутом $30°$. Треба визначити кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо висота піраміди дорівнює 5.

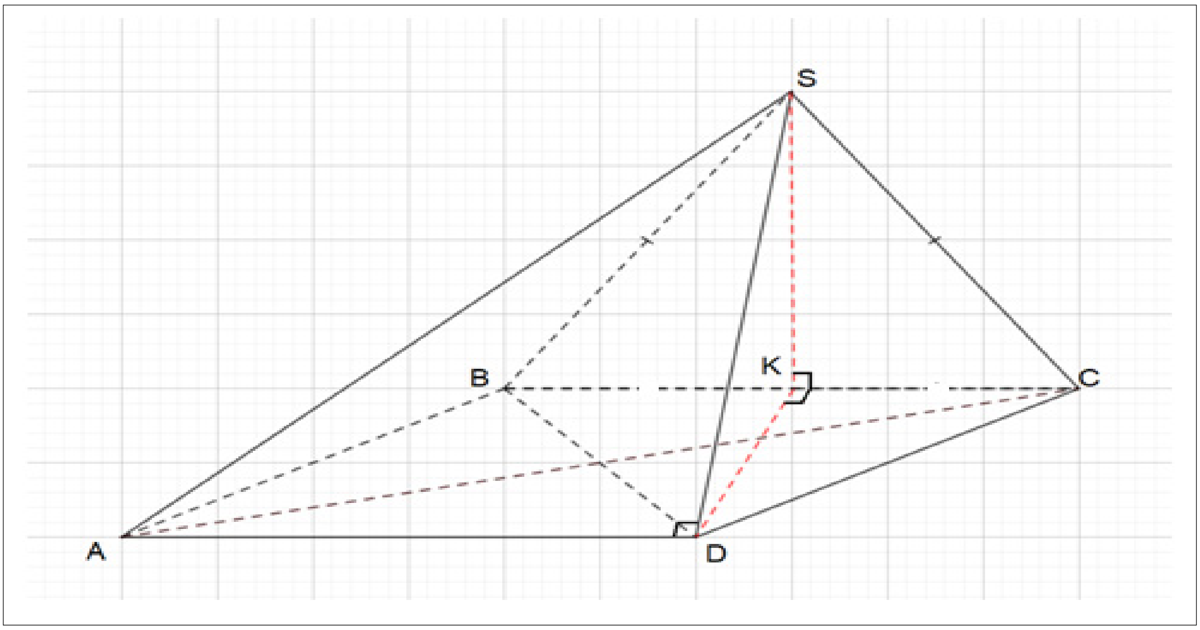

Рис. 1 Ілюстрація побудови висоти піраміди та лінійного кута для двогранного кута при ребрі основи

Отже, нехай $SABCD$ – задана піраміда (рис. 1), тут $ABCD$ – ромб, AC – більша діагональ, за умовою $AC = 30$, $SB = SC$, $BC = (SBC) \cap (ABC)$. Нехай

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

SK – висота ΔSBC; за властивістю перпендикулярних площин $SK \perp (ABC)$, отже SK – висота піраміди. Тут ми користуємося такою властивістю: якщо в одній з двох перпендикулярних площин проведено пряму, перпендикулярну до лінії перетину цих площин, то ця пряма буде перпендикулярна другій площині. Зробимо тут невеличке методичне зауваження. Дуже часто в задачах, де треба побудувати перпендикуляр, проведений з точки до площини, робимо саме так: обираємо деяку пряму, до якої проводиться перпендикуляр, потім доводиться, що це буде перпендикуляр, проведений до відповідної площини. Набагато складніше вести міркування за схемою: проведемо перпендикуляр до площини, а потім доведемо, що його основа знаходиться на заданій прямій. Вчителю при аналізі таких задач треба звертати увагу на такі важливі евристичні прийоми, щоб далі готувати учнів до розв'язування підбором відповідних доцільних задач. Продовжимо, розв'язання. За умовою SC нахилена до площини основи під кутом 30°, треба тепер вказати цей кут та обґрунтувати названий кут. SK – висота піраміди, SC – похила, KC – проекція SC на площину (ABC), тому кут SCK – це кут між прямою SC та площиною (ABC). За умовою $\angle SCK = 30°$. Отже, найпростіша частина задачі виконана: вказано та обґрунтовано кут між прямою та площиною. Тепер треба вказати та обґрунтувати кут між площинами.

Традиційно в комбінованих стереометричних задачах у розв'язанні виділяють дві частини: обґрунтування та обчислення. Це деяке негласне методичне правило, але математична практика демонструє, що строге дотримання таких правил може привести до помилок. У даному випадку є спокуса провести перпендикуляр з точки S на пряму AD, обравши в якості основу перпендикуляру деяку точку E, що знаходиться всередині відрізка AD. Далі з теореми про три перпендикуляри доводиться перпендикулярність прямих AD та KD, після чого встановлюється, що кут SKD лінійний кут двогранного кута пр. ребрі AD. Але математичний досвід вчителя має допомогти зрозуміти, що треба уважно обирати основи перпендикулярів. У даному випадку можна довести, що точка E не знаходиться всередині відрізка AD, а співпадає з точкою D. Дійсно, легко побачити, що $KC = 5ctg30° = 5\sqrt{3}.$ Тепер розв'язуємо планіметричну задачу.

Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD. Так як $BD = 10\sqrt{3}$, то легко з трикутника BOC встановити, що кут $BCO = 30^{\circ}$тоді з властивостей діагоналей ромбу випливає, що ΔBDC – рівносторонній, а тоді $DK \perp BC, DK \perp BC.$ але $BC \parallel AD$, тому $KD \perp AD.$ Тепер вже за теоремою про три перпендикуляри $SD \perp AD.$ Маємо, що $KD \perp AD$ і $SD \perp AD$, отже,

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

$\angle SDK$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі AD. Обчислення тривіальні: $tg\angle SDK = \frac{SK}{KD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $\angle SDK = arctg\frac{1}{3}$

У наступному прикладі обґрунтування менш тривіальне. Отже, у правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ сторона основи $ABCD$ дорівнює c, а бічне ребро SA утворює з площиною основи кут α. Через основу висоти піраміди паралельно грані ASD проведено площину β. Треба визначити периметр перерізу.

Перш за все, треба зрозуміти стратегію розв'язання, загальну схему. Отже, для отримання розв'язання задачі необхідно: а) обґрунтувати кут між бічним ребром та площиною основи; б) побудувати переріз піраміди $SABCD$ площиною β; в) обґрунтувати вид перерізу; г) визначити периметр перерізу. Звернемо увагу, що в умовах зовнішнього незалежного оцінювання 2018 року ці кроки, тобто план розв'язання, оголошувався учасникам, у той же час, якщо мова йде про математичну компетентність вчителя математики, він має вміти самостійно цей план визначати.

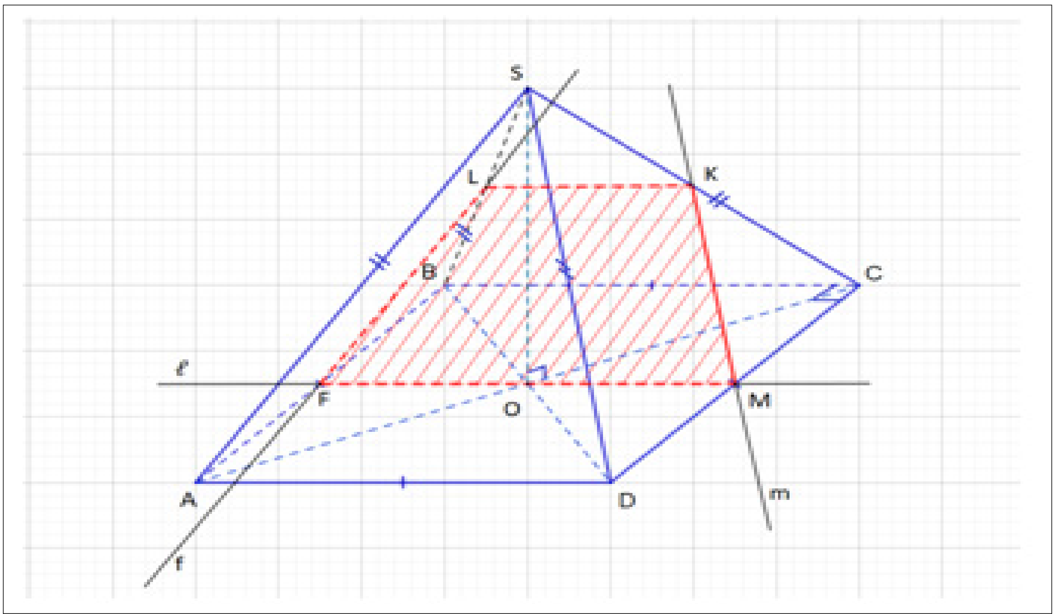

Рис. 2 Ілюстрація побудови перерізу піраміди площиною, що паралельна до бічної грані

Усі подальші етапи розв'язання ілюстровано на рис. 2. Отже, нехай $O = BD \cap AC$. Так як $SABCD$ – правильна, то $SO \perp (ABC)$ (вершина правильної піраміди проектується в центр основи). SA – похила, AO – проекція похилої SA на (ABC), тоді кут SAO – це кут між похилою SA та площиною основи. За умовою, $\angle SAO = \alpha$.

Вчитель має розуміти суть та основні етапи виконання задачі на побудову: алгоритм побудови та доведення коректності алгоритму. У ряді випадків ще одним елементом є дослідження (у яких випадках алгоритм, тобто процес побудови є коректним, кількість розв'язків задачі тощо). Треба усвідомлювати, що розв'язати задачу на побудову – це не просто побудувати на рисунку, рисунок лише ілюстрація, також треба відрізняти задачу на побудову у просторі від задачі на побудову на проекційному рисунку. У той же час, методично правильно буде дотримуватись правил паралельного проектування при ілюстрації процесу побудови. Тепер побудуємо переріз піраміди площиною β. У площині (ABC) проведемо пряму l через точку O паралельно до AD. Нехай $F = AB \cap l$, $M = CD \cap l$. У площині (SDC) через точку M проведемо пряму $m \parallel SD$. В площині (SAB) через точку F проведемо пряму $f \parallel SA$. Нехай $K = m \cap SC$, $L = f \cap SB$. Сполучаємо точки F, L, K та M. Чотирикутник $FLKM$ – шуканий переріз. Доведемо це. Фактично треба довести два факти: 1) точки F, L, K, M лежать в одній площині; 2) ця площина співпадає з площиною β. Отже, за теоремою Фалеса M – середина DC, F – середина AB. Аналогічно K – середина SC, L – середина SB. LK – середня лінія трикутника BSC. Тоді за властивістю середньої лінії трикутника $LK \parallel BC$. З того що $FM \parallel AD$, $AD \parallel BC$ випливає за властивістю транзитивності паралельності прямих, що $FM \parallel BC$. Так як $LK \parallel BC$, то знов-таки за властивістю паралельності прямих $FM \parallel LK$. Останнє означає, що же точки F, L, K та M лежать в одній площині. Далі за побудовою, $FM \parallel AD, MK \parallel SD$, отже, за ознакою паралельності площин $(KMF) \parallel (SAD)$.

Як відомо, через точку O можна провести одну і лише одну площину, що паралельна до даної, тоді площина β співпадає з площиною (FMK).

Вид перерізу тепер встановлюється тривіально. Отже, $FM \parallel LK$, тому наш переріз або паралелограм, або трапеція, але $FBCM$ – прямокутник, тому $FM = BC$, при цьому $LK = \frac{1}{2}BC$, тому $FMLK$ – трапеція. Якщо врахувати, що $KM = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}SA = LF$, то $FMLK$ – рівнобічна трапеція.

Звернемо увагу, що відсутність процесу побудови в розв'язанні задачі робить пункт обґрунтування перерізу достатньо нетривіальним. Далі простий ланцюжок співвідношень в трикутниках приводить до відповіді величини шуканого периметру, ця частина задачі для більшості вчителів не є проблемною, тому ми її не будемо тут обговорювати.

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

Вище ми навели приклади математичної діяльності вчителя математики при підготовці до навчання проводити обґрунтування в стереометричних задачах. Ці приклади стосувались пошуку розв'язань, але, як ми бачимо, математична діяльність тут дуже тісно пов'язана з методичною, також можна відмітити, що в даному питанні методична діяльність стає похідною від математичної.

Роблячи висновки, підкреслимо, що розглянуті нами три види діяльності можливі лише за умов математичної, організаційно-методичної та ілюстративно-технологічної готовності вчителя при навчанні розв'язувати задачі з обґрунтуванням в стереометрії. Звернемо ще раз увагу, що без математичної складової усі інші стають беззмістовними, не зважаючи на важливість кожної з них. Домінування математичної складової пов'язано також з більшим часом та інтелектуальними витратами по її формуванню та розвитку.

Нами зроблено спроби вимірювання математичної складової готовності навчати обґрунтування в стереометричних задачах. Протягом 2017–2019 року на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики для 32 навчальних груп (усього 827 вчителів) під час вхідного та вихідного модульного контролю пропонувалась задача з детальним стереометричним обґрунтуванням, задача оцінювалась в 6 балів (задача типа прикладів 1, 2). За результатами тестувань для кожної групи фіксувалась складність завдання за методикою Українського центру оцінювання якості освіти [4] (відношення суми балів набраних респондентами до максимально можливої суми балів, що може бути набрана усіма респондентами) та відсоток респондентів, які повністю розв'язали частину задачі, що пов'язана з обґрунтуванням. Останнє число більше за відсоток тих, хто повністю розв'язав задачу, але пояснюється технічними причинами в обчислювальній частині задачі і не є предметом даного нашого дослідження. Вхідний контроль показує, що відсоток тих, хто виконав завдання на обґрунтування складає в середньому 1,8% (зрозуміло, мова йде про середнє зважене), водночас складність завдання складає порядку 29% (чим менше складність, тим завдання складніше, з цим показником зворотній зв'язок). Останнє пояснюється тим, що стереометрична задача містить обчислювальну частину, яку можна виконати без якісного обґрунтування, бали також виставляються за грамотний рисунок. Треба звернути увагу, що для завдання зовнішнього незалежного оцінювання 2019 року відсоток тих, хто впорався, склав 2,7 % (вимірювання проводилися для трьох груп вчителів).

Як ми бачимо, вчителі, на жаль, показують дуже низький рівень при розв'язуванні геометричних задач на доведення. Нами зроблено спроби дослідити зв'язок цієї математичної діяльності з деякими іншими, а саме –

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

з розв’язуванням планіметричної задачі на доведення та критеріальною перевіркою розв’язання планіметричної та стереометричної задачі з обґрунтуванням. Щодо перевірки, вчителям пропонувались три учнівські роботи: робота А (абсолютно правильна); Б (містить деякі недоліки); В (містить достатньо грубі помилки). Варіанти А, Б, В пропонувались для планіметрії та стереометрії. Результат роботи вчителя оцінювався за бінарною шкалою (1–0). У даному досліджені брали участь 26 вчителів однієї групи. При перевірці учнівських завдань вчителю треба було або визнати абсолютну правильність роботи, або визнати її помилковою (Б і В помилкові). Отже, після тестувань сформовано вісім 26-вимірних двійкових векторів. Результати тестування відображено в таблиці 1.

Таблиця 1

Результати вимірювань «Розв’язання – перевірка»

Номер респондента	С	П	АП	БП	ВП	АС	БС	ВС
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0	0
3	0	1	1	1	1	0	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	0	0	1
8	0	0	1	1	1	1	0	0
9	1	0	1	1	1	1	1	0
10	0	1	1	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	1	0	0	0
12	0	0	1	1	1	1	0	0
13	1	1	1	1	1	1	0	0
14	0	1	1	1	1	1	1	1
15	0	0	0	0	1	1	0	1
16	0	1	1	1	1	0	0	0
17	0	0	1	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	1	0	0
19	0	1	1	1	0	0	0	0
20	0	0	1	0	1	0	0	0
21	0	1	1	1	1	1	0	1
22	0	0	1	0	0	0	0	1
23	0	0	1	1	1	1	0	1
24	0	1	1	0	1	0	0	0
25	0	0	1	0	1	0	0	0
26	0	1	1	1	1	1	1	0
Середнє	0,15	0,46	0,81	0,54	0,77	0,58	0,19	0,38

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

Для кожного такого вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_{26})$ вводимо його середнє

$$\breve{X} = \frac{1}{26}\sum_{I=1}^{26} X_I$$

та для кожної пари векторів індекс відповідності

$$J(X;Y) = \frac{1}{26}\sum_{I=1}^{26}|X_I - Y_I|$$

Отже, розглядаємо вектор результативності розв'язання вчителями задачі стереометрії – С, планіметрії – П, перевірки відповідних задач зі стереометрії – АС, БС, ВС та планіметрії – АП, БП, ВП. За нашими даними $\breve{C} = 0{,}15$, $\breve{П} = 0{,}46$ (пропонувались задачі, аналогічні задачам вхідного тестування). Як ми бачимо, результативність розв'язування планіметричних задач набагато вище. Результати обчислення індексів відповідності відображено в таблиці 2.

Таблиця 2

Індекси відповідності між результативністю розв'язування задач та правильністю оцінювання учнівських розв'язань

Розв'язування/Перевірка	АП	БП	ВП	АС	БС	ВС
С	0,35	0,38	0,61	0,42	0,12	0,48
П	0,34	0,23	0,46	0,57	0,34	0,38

Обговоримо описані результати. Перш за все, звернемо увагу, що найлегше перевіряються варіанти А. Скоріше це обумовлено деякими психологічними факторами «ідеальної роботи», більше проблем виникає з варіантом В, але найскладніше розпізнати помилку варіанта Б. Водночас ми бачимо, що для планіметричних задач помилки розпізнаються краще. Звернемо увагу на маленький індекс відповідності (чим менше, тим кореляція більше) між векторами С та БС. Порядковий аналіз цих векторів також чітко ілюструє практичну неможливість ідентифікувати неправильні розв'язання вчителями, які не можуть самостійно розв'язати відповідну задачу. Звернемо увагу, що кількість вчителів, що впорались з перевіркою планіметричної задачі Б суттєво більше за кількість вчителів, які змогли розв'язати схожу задачу. Отже, можемо говорити, що відсутність вміння розв'язувати задачі на доведення в стереометрії не дає можливості учителю грамотно оцінити учнівські розв'язання. Ми не користувались в даному аналізу статистичними методами перевірки гіпотез через нерандомізованість вибірки та її недостатньо великий об'єм. Для планіметричних задач такий чіткий зв'язок не простежується. Дана гіпотеза підтверджується результатами спостережень.

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

Значна кількість вчителів не бачить зв'язку між неспроможністю розв'язувати задачі на доведення в стереометрії вчителем та низькою результативністю учнів на зовнішньому незалежному оцінюванні при розв'язуванні відповідних задач. У чотирьох групах слухачів курсів підвищення кваліфікації ознайомлювали з психометричними даними сертифікаційної роботи з математики 2019 року, відповідно до яких відсоток учнів, що впоралися з доведенням в стереометричній задачі коливається від 2% до 3%. Вчителям пропонувалося виділити три основні причини цього явища шляхом анонімного анкетування після невеличкого обговорення. За результатами обговорення 87% опитуваних виділили три, на їх думку, основних фактори: недостатній рівень логічного мислення здобувачів освіти, дуже малу кількість годин, що відводиться на вивчення математики, недостатній рівень мотивації в навчанні. Лише 4% опитуваних серед причин визначили недостатній рівень математичної компетентності вчителя.

Відсутність практичних навичок у розв'язуванні задач на доведення не дає можливості чітко усвідомити проблеми власної математичної підготовки. Тому бажано на курсах підвищення кваліфікації вчителів спочатку ознайомити, проілюструвати розв'язання декількох задач середньої складності, потім провести анкетування вчителів за тими проблемами, які вони бачать у своїй підготовці. Протягом 2017–2018 років нами проводились відповідні опитування вчителів у 13 групах слухачів (різні вікові та кваліфікаційні категорії). Слухачам називалися питання шкільного курсу геометрії 10–11 класів, і якщо слухач відчував невпевненість у розв'язуванні задач на доведення відповідної теми, він її відмічав, тобто відбувалась так звана схема голосування. Більше 50 % вчителів виділили як проблемні питання обґрунтувань, пов'язані з ознакою мимобіжності прямих, перпендикулярністю площин, кута між площинами, відстанями від точки до прямої, від точки до площини, між мимобіжними прямими, геометричними місцями точок у просторі, перерізами.

Таблиця 3

Опитування вчителів щодо складності для них теоретичних тем стереометрії

Теоретичні питання курсу стереометрії	Частина респондентів, які визнають проблеми з відповідним питанням(%)
1	2
Аксіоми, наслідки аксіом	17
Паралельність прямих та площин у просторі	21
Мимобіжність, ознака мимобіжності	56
Перпендикулярність прямої та площини	45
Перпендикулярність площин	59
Кут між прямою та площиною	36
Кут між площинами	73

Продовження табл. 3

1	2
Кут між мимобіжними прямими	49
Відстань від точки до прямої	62
Відстань від точки до площини	71
Відстань між мимобіжними прямими	93
Побудова перерізів	82
Основні геометричні місця точок у просторі	87
Многогранники, їх властивості	23
Тіла обертання	36
Вектори, координати	44
Рівняння сфери та площини	31
Перетворення у просторі	45

Звернемо увагу, що деякі, на нашу думку, складні теми не знайшли необхідної кількості голосів. Це пов'язано з тим, що ми орієнтувались на базові задачі шкільного курсу математики (високий рівень «стандарту»), де питання аналітичної геометрії та геометричних перетворень глибоко не розглядаються.

Короткотривалі курси підвищення кваліфікації не дозволяють детально обговорити всі проблемні питання, які виникають у вчителів. Нами обрано таку стратегію. Усі питання фахової підготовки вчителя розбито нами на три блоки: сучасна теорія та методика навчання математики (методичний), науково-теоретичні основи шкільного курсу математики (науково-теоретичний), практикум з елементарної математики (математичний практикум). Геометричну складову третього та другого блоків ми формуємо, в основному, з питань зі стереометрії, так як стереометричні задачі дають можливість використовувати й планіметричні ідеї. На окремій, оглядовій, лекції розглядаємо питання вимірювання відстаней та кутів у стереометрії, особливу частину займає доведення теореми про існування перпендикуляру, проведеного з довільної точки простору до площини, та теореми про відстань між мимобіжними прямими. Обговорення цих питань охоплює майже всі ідеї обґрунтувань в базових стереометричних задачах, тому носить узагальнювальний характер. Під час практичних занять ще раз обговорюються основні ідеї та прийоми роботи в задачах на доведення в планіметрії.

Дуже важливим в системі курсової перепідготовки вчителів ми вважаємо проведення так званих математико-методичних тренінгів. Тренінг розбивається на декілька етапів, один з яких присвячений стереометричній задачі з обґрунтуванням. Слухачі розбиваються на три команди, кожній команді видається своя задача, яка передбачає три етапи: побудова графічної моделі, обґрунтування, обчислення. Робота в групах йде за методом «летючого плакату», після виконання певного етапу лист передається іншій команді. Отже, за принципом циклічного зсуву, кожна команда проходить три етапи

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

розв'язування. Наступний крок – обговорення. Особлива увага приділяється перевірці обґрунтувань. Слухачі вчаться ідентифікувати логічні помилки. Під час обговорення модератори пропонують учасникам тренінгу моделювати можливі помилки учнів, далі йде аналіз можливих причин появи відповідних помилок. Також під час цього тренінгу обговорюється специфіка навчання задач на доведення в залежності від кількості годин та рівневого розподілу класу, тобто основних факторів педагогічної ситуації. Слухачам також пропонується в якості практичної роботи з цифрових технологій навчання підготувати динамічні моделі для задач, що обговорювались, також проводиться колективне оцінювання моделей та їх дидактична доцільність.

Під час вихідного модульного контролю пропонується серед інших геометрична задача з елементами обґрунтування. Ми вважаємо за доцільне, щоб вчитель самостійно оцінив стан та динаміку розвитку власної математичної компетентності, зокрема рівень вмінь проводити обґрунтування в стереометричних задачах. У той же час ми, за бажанням слухача, допомагаємо по завершенню курсів скласти йому індивідуальний план самоосвіти, в тому числі й частину, що стосується математичної компетентності і зокрема стереометричним задачам на доведення.

За нашими спостереженнями усвідомлення вчителями проблем з питаннями обґрунтування в стереометричних задачах, запропонований нами практикум та теоретичні заняття сприяють позитивній динаміці кількості вчителів, які можуть генерувати абсолютно правильні розв'язання стереометричних задач на доведення з елементами обґрунтування середньої складності, що беззаперечно підвищує їх готовність навчати відповідним речам здобувачів освіти. Спостереження підтверджуються статистичними даними вхідного та вихідного контролю, які ми проводили протягом 2018-2019 років для 16 груп. У таблиці 4 розміщено інформацію по складності стереометричної задачі з обґрунтування для вхідного та вихідного контролю. Більш детальний аналіз робіт показує, що покращення результатів відбулось саме завдяки більш якісному виконання частини задачі пов'язаної з обґрунтуванням.

Таблиця 4

Середня складність виконання слухачами стереометричної задачі на обґрунтування для вхідного та вихідного тестування (%)

№ групи	Вхід	Вихід	Динаміка
1	2	3	4
1	17,2	19,8	+
2	16, 7	20, 1	+
3	23,9	24,6	+
4	19, 4	22,8	+
5	30, 2	31,01	+

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

Продовження табл. 4

1	2	3	4
6	32,7	35, 4	+
7	15, 6	15,3	-
8	24,9	30,7	+
9	26,1	29,9	+
10	28,5	28,8	+
11	29,1	32,6	+
12	16,3	15,9	-
13	25,7	27,1	+
14	26,3	28	+
15	19,9	22, 1	+
16	25,4	29,2	+

Значущість позитивної динаміки можна легко перевірити, наприклад, за допомогою критерію знаків (найпростіший непараметричний критерій). У нашому випадку значення статистики критерію знаків $\mu = 14$. Для об’єму вибірки 16 та рівня значущості 2,5% критичне значення для критерію знаків (при правосторонній альтернативі) дорівнює 12, отже, гіпотеза про відсутність ефекту навчання відхиляється. Отже, наші підходи дають позитивну динаміку навчання вчителів.

6. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ / CONCLUSIONS AND PROSPECTS FOR FURTHER RESEARCH

Готовність учителя здійснювати відповідну діяльність включає три складові: математичну, організаційно-методичну та ілюстративно-технологічну, що включають в себе уміння самого вчителя розв’язувати задачі на доведення в стереометрії, організовувати роботу учнів на уроці при виконанні задач на обґрунтування в стереометрії, використання цифрових технологій для ілюстрацій в стереометричних задачах відповідно. Визначним компонентом відповідної готовності є математичний компонент. Через низку суб’єктивних та об’єктивних причин значна кількість вчителів не в повній мірі вміє розв’язувати задачі на доведення та проводити обґрунтування в стереометрії. Нами встановлено, що основними з цих причин є недостатня теоретична підготовка вчителів в галузі науково-теоретичних основ шкільного курсу математики, практики з розв’язування задач на доведення. Основними проблемними питаннями для вчителів залишаються задачі на обґрунтування, пов’язані з ознакою мимобіжності прямих, перпендикулярністю площин, кута між площинами, відстанями від точки

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

до прямої, від точки до площини, між мимобіжними прямими, геометричними місцями точок у просторі, перерізами. Встановлено тісний зв'язок між недостатнім вмінням розв’язувати задачі на доведення в стереометрії та помилковим оцінюванням робіт учнів, що містять фрагменти доведень стереометричних фактів. Для планіметричних та алгебраїчних задач середньої складності відповідний зв'язок не є таким чітким. Запропоновано та експериментально апробовано трансформацію очних курсів підвищення кваліфікації вчителів математики. Поєднання лекцій з науково-теоретичних основ шкільного курсу математики, практикумів з розв’язування задач елементарної математики, математико-методичних тренінгів, на яких розглядаються стереометричні задачі на доведення, можна вважати ефективним. Вимірювання та статистичний аналіз фіксують наявність ефекту навчання за запропонованою нами схемою з питань покращення розв’язування задач на доведення в стереометрії учителями.

Перспективи подальших досліджень полягають у створенні науково обґрунтованої методичної системи розвитку логічного компоненту математичної компетентності вчителів для стереометрії, детальний статистичний аналіз ефективності навчання розв’язувати задачі на доведення, володіння інноваційними технологіями навчання розв’язувати задачі на доведення під час курсової перепідготовки вчителів математики.

7. СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

[1] І. А. Акуленко, *Компетентісно-орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект): монографія.* Черкаси, Україна, 2013, 460 с.

[2] Л. С. Голодюк, «Оновлення методичних форм роботи з педагогами на засадах інтеграції», *Науково-методичний супровід функціонування інформаційного простору регіону: наук.-метод. вісник,* № 52, с. 113–122, 2016.

[3] А. С. Залавська, «Задачі на доведення у стереометрії», *Фізико-математична освіта: зб. наук. праць,* Вип. 1(6), с. 21–25, 2014.

[4] *Звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання у 2019 році*, Т. 2. [Електронний ресурс]. Доступно: testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/08/ZVIT-ZNO_2019-Tom2.pdf

[5] В. К. Кірман, «Підходи до формування змісту післядипломної математичної освіти вчителів», *Реалії та перспективи природничо-математичної підготовки у закладах освіти, на наук.-практ. конф. (11–12 верес. 2019)*. Херсон, Україна, 2019, с. 62–64.

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

[6] А. І. Кузьмінський, Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, *Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики: монографія*. Черкаси, Україна, 2009, 320 с.
[7] З. І. Слєпкань, *Методика навчання математики: підручник для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів*. Київ, Україна, 2000, 512 с.
[8] Н. А. Тарасенкова. Дидактична аналітика як основа професійного тренінгу для вчителів математики. *Science and education a new dimension;* Chier Honorary Editor. Budapest, VI(63), pp. 54–58, 2018.
[9] Н. А. Тарасенкова, «Підвищення кваліфікації учителів математики в умовах компетенізації освіти», *Проблеми математичної освіти – 2019, на Міжнар. наук.-метод. конф. (11–13 квіт. 2019, м. Черкаси*). Черкаси, Україна, 2019, с. 18–19.
[10] О. С. Чашечнікова, С. А. Колесник, «Інноваційні підходи до майбутньої підготовки вчителя математики», *Навчання елементарної математики. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології,* № 8(42), с. 262–269, 2014.
[11] M. A. Mariotti, «The Contribution of Information and Communication Technology to the Teaching of Proof», *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching.* Springer, p. 173–195, 2019.

FORMATION OF MATHS TEACHERS' READINESS FOR TEACHING HOW TO SOLVE PROOF TASKS IN STEREOMETRY

Vadym Kirman,
PhD in Pedagogic Science,
Head of the Department of mathematics and natural sciences
Communal Institution of Higher Education «Dnipro Academy of Continuing Education» of Dnipropetrovsk Regional Council».
Dnipro, Ukraine.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8107-6618
vadym.kirman@gmail.com

Liudmyla Kharlash,
PhD in Philosophical Sciences, Associate Professor at the Department of mathematics and natural sciences
Communal Institution of Higher Education «Dnipro Academy of Continuing Education» of Dnipropetrovsk Regional Council».
Dnipro, Ukraine.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0797-1873
lharlash@gmail.com

Abstract. The article examines maths teachers' readiness to teach high school students how to solve proof tasks in stereometry. It is shown that the teacher's readiness to carry out the relevant activity can be divided into three components: mathematical, organizational and methodological, illustrative and technological. They include the teacher's personal ability to solve proof tasks in stereometry, to organize his or her students' work at the lesson when performing proof tasks in stereometry, to apply digital technology for illustrations in stereometric problems. Measurements and observations demonstrate the fact that there is only a small percentage of teachers who are ideally able to solve proof tasks of medium complexity; this percentage is the same as among the participants of external independent assessment in mathematics (it does not exceed 3%). A major group of issues that are more than 50% problematic for teachers working in high school is identified: they include proof tasks related to skew lines, the perpendicularity of planes, the interplanar angle, the distance of a point from a line, the distance of a point from a plane, between skew lines, loci in space, (cross) sections. It has been shown that teachers' poor skills in solving proof tasks cause the inability to identify students' mistakes and deficiencies in criteria-based assessment of solving a geometric problem with a detailed answer. Particular approaches to the development of teachers' readiness for teaching how to solve proof tasks in stereometry are proposed. At the advanced training courses they include diagnostics and teachers' self-analysis of the effectiveness of solving proof tasks, a system of lectures and practical workshops related to the logical structure of geometry course, delivering combined mathematical and methodological trainings, performing problem solving practicum and mini-projects with the use of modern educational digital technologies, forming individual plans of self-education. The dynamics of maths teachers' success in performing proof tasks in stereometry has been analyzed. It is shown that there is a tendency for increasing the number of maths teachers who can cope with solving proof tasks at the end of the advanced training courses (comparing with the beginning) providing that the proposed approaches were used.

Keywords: professional competence of maths teacher; proof tasks, proofs in stereometry; institutions of postgraduate education; continuing education.

Вісник післядипломної освіти. Випуск 12(41) «Серія «Педагогічні науки» (Категорія «Б»)
Bulletin of Postgraduate education. Issue 12(41) (Educational Sciences Series) (Category «B»)
https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

ФОРМИРОВАНИЕ ГОТОВНОСТИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ОБУЧАТЬ ПРОВЕДЕНИЮ ОБОСНОВАНИЙ В СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Кирман Вадим Кимович,
кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой
естественно-математического образования
КЗВО «Днепровская академия непрерывного образования
Днепропетровского областного совета».
Днепр, Украина.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8107-6618
vadym.kirman@gmail.com

Харлаш Людмила Михайловна,
кандидат философских наук,
доцент кафедры естественно-математического образования
КЗВО «Днепровская академия непрерывного образования
Днепропетровского областного совета».
Днепр, Украина.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0797-1873
lharlash@gmail.com

Аннотация. В статье исследуется готовность учителей математики обучать проводить обоснования в стереометрических задачах учащихся старшей школы. Показано, что готовность учителя осуществлять данную деятельность включает три составляющие: математическую, организационно-методическую и иллюстративно-технологическую, которые включают в себе умения самого учителя решать задачи на доказательство в стереометрии, организовывать работу учащихся на уроке при выполнении задач на обоснование в стереометрии, использование цифровых технологий для иллюстраций в стереометрических задачах. Проведенные измерения и наблюдения фиксируют лишь незначительную часть учителей, которые идеально могут решать задачи на обоснование средней сложности, процент таких учителей имеет такой же порядок, как и у участников внешнего независимого оценивания по математике (не превышает 3%). Обнаружена основная группа вопросов, которые являются проблемными более чем для 50% учителей., которые работают в старшей школе: задачи на обоснование, связанные со скрещиваюшимися прямыми, перпендикулярностью плоскостей, угла между плоскостями, расстояниями от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми, геометрическими местами точек в пространстве, сечениями. Показано, что недостаточные навыки учителей при решении задач на обоснование становятся причиной невозможности идентификации ученических ошибок и недостатков при критериальном оценивании решений геометрических задач с развернутым описанием. Предложены подходы развития готовности учителей обучать обоснованиям в стереометрических задачах. Они включают во время проведения курсов повышения квалификации диагностику и самоанализ учителями результативности решений задач на доказательство, систему лекций и практических занятий по вопросам логической структуры курса геометрии, проведение комбинированных математико-методических тренингов, выполнение практических работ и мини-проектов с использованием современных цифровых технологий, формирование индивидуальных планов самообразования. Проведен анализ успешности выполнения учителями математики заданий на обоснование в стереометрии. Показано, что наблюдается тенденция увеличения числа учителей, которые справляются с заданиями на обоснование по завершению курсов повышения квалификации относительно начала при условии использования предлагаемых подходов.

Ключевые слова: профессиональная компетентность учителя математики; задачи на доказательство; обоснования в стереометрии; учреждения последипломного образования; непрерывное образование.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

[1] I. A. Akulenko, Kompetentisno-oriientovana metodychna pidhotovka maibutnoho vchytelia matematyky profilnoi shkoly (teoretychnyi aspekt): monohrafiia. Cherkasy, Ukraina, 2013, 460 s.

[2] L. S. Holodiuk, «Onovlennia metodychnykh form roboty z pedahohamy na zasadakh intehratsii», Naukovo-metodychnyi suprovid funktsionuvannia informatsiinoho prostoru rehionu: nauk.-metod. visnyk, № 52, s. 113–122, 2016.

[3] A. S. Zalavska, «Zadachi na dovedennia u stereometrii», Fizyko-matematychna osvita: zb. nauk. prats, Vyp. 1(6), s. 21–25, 2014.

[4] Zvit pro provedennia zovnishnoho nezalezhnoho otsiniuvannia u 2019 rotsi, T. 2. [Elektronnyi resurs]. Dostupno: testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/08/ZVIT-ZNO_2019-Tom2.pdf

[5] V. K. Kirman, «Pidkhody do formuvannia zmistu pisliadyplomnoi matematychnoi osvity vchyteliv», Realii ta perspektyvy pryrodnycho-matematychnoi pidhotovky u zakladakh osvity, na nauk.-prakt. konf. (11–12 veres. 2019). Kherson, Ukraina, 2019, s. 62–64.

https://doi.org/10.32405/2218-7650-2020-12(41)

[6] A. I. Kuzminskyi, N. A. Tarasenkova, I. A. Akulenko, Naukovi zasady metodychnoi pidhotovky maibutnoho vchytelia matematyky: monohrafiia. Cherkasy, Ukraina, 2009, 320 s.
[7] Z. I. Sliepkan, Metodyka navchannia matematyky: pidruchnyk dlia stud. mat. spetsialnostei ped. navch. zakladiv. Kyiv, Ukraina, 2000, 512 s.
[8] N. A. Tarasenkova. Dydaktychna analityka yak osnova profesiinoho treninhu dlia vchyteliv matematyky. Science and education a new dimension; Chier Honorary Editor. Budapest, VI(63), pp. 54–58, 2018.
[9] N. A. Tarasenkova, «Pidvyshchennia kvalifikatsii uchyteliv matematyky v umovakh kompetenizatsii osvity», Problemy matematychnoi osvity – 2019, na Mizhnar. nauk.-metod. konf. (11–13 kvit. 2019, m. Cherkasy). Cherkasy, Ukraina, 2019, s. 18–19.
[10] O. S. Chashechnikova, S. A. Kolesnyk, «Innovatsiini pidkhody do maibutnoi pidhotovky vchytelia matematyky», Navchannia elementarnoi matematyky. Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii, № 8(42), s. 262–269, 2014.
[11] M. A. Mariotti, «The Contribution of Information and Communication Technology to the Teaching of Proof», Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Springer, p. 173–195, 2019.

Стаття надійшла до редакції
08 квітня 2020 року